Exercice N°1

I)Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & si\ x < 0 \\ x^2\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) Interpréter ce résultat graphiquement

1) a) on a: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+1) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-1\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

d'ou on a F.I $\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}}$

Pour tout $x<0$ on a: $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$
$= |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$
$= -x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

alors $f(x) = \dfrac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}{x} = \dfrac{-\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}} - \dfrac{1}{x}$

$= -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x}$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{+\infty}} - \frac{1}{x}\right) = -1$

b) La droite $D_1: y=-1$ est une asymptote horizontale à C_f au voisinage de $-\infty$

2)Pour tout $x > 0$ on considère les fonctions U et V définies par $V(x) = \frac{1}{x}$ et $U(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x}$

a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} UoV(x)$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) a) • $\lim\limits_{x\to+\infty} V(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ b

• $\lim\limits_{x\to 0} U(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\pi x)}{x} = \pi$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} UoV(x) = \pi$.

gof.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$

$\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$

alors $\lim\limits_{x\to a} gof(x) = c$

b) Pour tout $x>0$ on a

$x^2\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \quad si\ x>0$

$$W\circ V(x) = W(V(x)) = \frac{\sin(\pi . V(x))}{V(x)} = \frac{\sin(\pi . \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = x . \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = \frac{x^2\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x} = \frac{f(x)}{x}$$

alors $f(x) = x . W\circ V(x)$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} W\circ V(x) = \pi$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x . W\circ V(x) = +\infty$

d'ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3) a)Calculer $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$

b)i) Montrer que pour tout $x>0$ on a : $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$

ii) En déduire $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

c) En déduire que f est continue en 0

r $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & si\ \ x<0 \\ x^2\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & si\ x>0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$

3) a) on a : $\lim\limits_{x\to0^-} (\sqrt{x^2+1}-1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^-} x = 0$

Alors on a F.I $\boxed{\frac{0}{0}}$

Pour tout $x<0$ on a : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}$

$$= \frac{x^2+\cancel{1}-\cancel{1}}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}(\sqrt{x^2+1}+1)}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

alors $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{0}{2} = 0$

b) i) Pour tout $x>0$ on a : $-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq 1$

alors $-x^2 \leq x^2\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq x^2$

donc $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$

ii) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+} -x^2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to0^+} x^2 = 0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$

Limite = image

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

c) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$ et $f(0) = 0$

donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = f(0)$

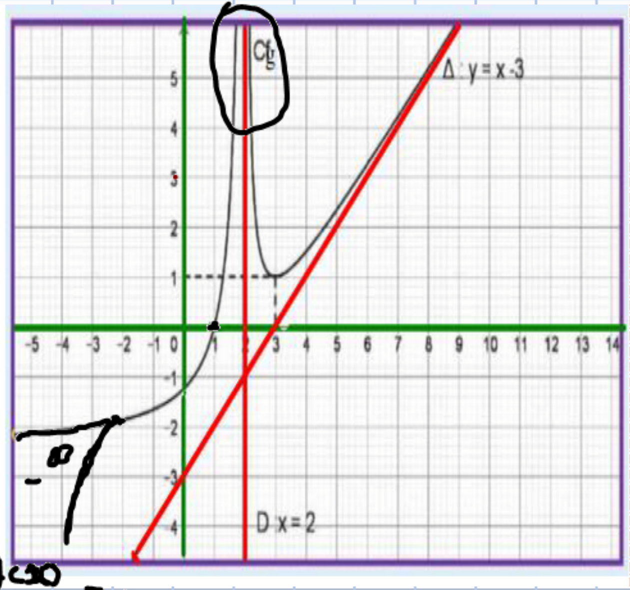
d'où f est continue en 0.

II)

1)Déterminer en justifiant la réponse

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x)-x)$



1)a) $\mathcal{C}_g$ admet au voisinage de $-\infty$ une B.I de direction asymptotique celle de $(O,\vec{i})$ et située au-dessous de $(O,\vec{i})$

Alors $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

b)

* La courbe (C_g) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique Δ d'équation $y = x - 3$

$y = ax + b$

et $\mathcal{C}_g$ au-dessus de $(O,\vec{i})$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x)-x) = -3$

2)Déterminer en justifiant la réponse $g\,(\,]-\infty, 2\,[\,)$ et $g(]2,3])$

*) g est continue et strictement croissante sur $]-\infty, 2[$

alors $g(]-\infty, 2[) =]\lim\limits_{x\to-\infty} g(x), \lim\limits_{x\to2^-} g(x)[$

or : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^-} g(x) = +\infty$

donc $g(]-\infty, 2[) =]-\infty, +\infty[$.

*) g est continue et strictement décroissante sur $]2,3]$

alors $g(]2,3]) = [g(3) ; \lim\limits_{x\to2^+} g(x)[= [1, +\infty[$

3)Calculer $fog(1)$ et $fog(3)$

4) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to2^+} fog(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} fog(x)$

3) *) $fog(1) = f(g(1)) = f(0) = 0$

*) $fog(3) = f(g(3)) = f(1) = \sin(\pi) = 0$

4) *) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to2^+} g(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to2^+} fog(x) = +\infty$

*) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} fog(x) = -1$